

Решатель на базе регуляризованных уравнений мелкой воды с адаптивным измельчением сеток

Бут И.И.^{a,b,*}, Кирюшина М.А.^b, Елистратов С.А.^{a,c}, Елизарова Т.Г.^b, Гиняков А.Д.^a

^aИнститут системного программирования / РАН, Москва, Россия

^bИнститут прикладной математики им. М. В. Келдыша / РАН, Москва, Россия

^cИнститут океанологии им. П. П. Ширшова / РАН, Москва, Россия

Abstract

В статье представлен новый решатель с адаптивным измельчением сеток SWqgdAMR на базе открытой программной платформы AMReX. Новый решатель основан на регуляризованных уравнениях мелкой воды. В работе описаны уравнения, их дискретизация и особенности реализации в AMReX. Работоспособность SWqgdAMR была показана на двух тестовых задачах: двумерная задача прорыва круговой дамбы (распад столба жидкости) и задача о распаде двух столбов жидкости, разных по высоте.

Keywords: уравнения мелкой воды, РУМВ, адаптивное измельчение сеток, КГД уравнения, регуляризованные уравнения, AMReX

1. Введение

Для моделирования задач гидро-газодинамики требуется использовать всё более точные алгоритмы и мелкие расчётные сетки, а как следствие и большие вычислительные ресурсы, в том числе и методы распараллеливания расчётов на GPU ядра. Таким образом, было решено разрабатывать новый решатель с адаптивным измельчением сеток на базе открытых платформ, виду того, что такой подход имеет ряд преимуществ по сравнению с написанием самописных кодов. Во-первых, открытые платформы, как правило, предоставляют устойчивые и тщательно протестированные фреймворки, одобренные широким научным сообществом, что снижает риск ошибок и повышает общую надёжность. Во-вторых, использование открытых платформ способствует функциональной совместимости и возможности повторного использования, обеспечивая беспрепятственную интеграцию с другими инструментами и облегчая сотрудничество между исследователями. В-третьих, использование существующих открытых платформ позволяет значительно сократить время и стоимость разработки, поскольку эти платформы часто предлагают широкий спектр функциональных возможностей, начиная от обработки данных и заканчивая визуализацией и параллельными вычислениями. В-четвёртых, открытые платформы получают постоянное развитие и поддержку со стороны

*

Email address: email_ivan.but@ispras.ru (Бут И.И.)

сообщества пользователей, что приводит к регулярным обновлениям, исправлению ошибок и повышению производительности. Это контрастирует с самописными кодами, которые часто зависят исключительно от ресурсов и опыта человека или команды, создавшей их.

Среди свободного программного обеспечения, был выбран AMReX, на сегодняшний день являющийся наиболее оптимальным открытым фреймворком позволяющим: 1) Использовать технологию адаптивного измельчения сеток (AMR); 2) Использовать возможность распараллеливания вычислений на графические ядра GPU; 3) Использовать метод погруженных границ при моделировании твёрдых тел в потоке; 4) Структурированные сетки; 5) С 2023 года является частью The High Performance Software Foundation основанного Linux Foundation [14], что обеспечит огромную поддержку и дальнейшее развитие данного пакета программ. На базе AMReX уже проводились численные расчёты задач газодинамики, в том числе и сравнение AMReX и OpenFOAM [7]. Поэтому было решено реализовать на базе AMReX решатель для задач гидро-газодинамики использующий КГД уравнения, аналогичный решатель уже реализован в OpenFOAM [4; 9] под общим названием QGDSolver [11] и показал свою высокую эффективность. К сожалению, как уже отмечалось ранее OpenFOAM не обладает возможностью распараллеливания вычислений на графические ядра и алгоритмом адаптивного измельчения сетки.

В представленной работе, описана реализация квази-газодинамического (КГД) алгоритма в AMReX, но пока в упрощенной форме. В качестве упрощения выбран баротропный вариант системы, который позволяет избавиться от уравнения энергии и уравнений состояния. Этот баротропный вариант при известных предположениях имеет вид уравнений мелкой воды. Стоит отметить, что реализация решателя SWqgdAMR в программном комплексе AMReX является ключевым шагом в дальнейшем расширении набора решателей на базе квази-газодинамических уравнений.

Сам КГД подход развивается на протяжении более 30 лет для задач газовой динамики и несжимаемых течений [5; 16; 19; 21]. В последние годы этот подход был реализован для задач в приближении мелкой воды, см., например, работы [1; 6; 12; 15; 17; 18].

Дальнейший часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются регуляризованные уравнения мелкой воды, их покомпонентную запись и дискретизацию. Далее в разделе 3 будет описана реализация решателя SWqgdAMR в программном комплексе AMReX. Раздел 4 будет посвящен валидации и верификации разработанного решателя. Завершит работу раздел 5, в котором будут сделаны основные выводы. В разделе Appendix 7 приведена покомпонентная запись КГД-уравнений мелкой воды и их детальная дискретизация.

2. Математическая модель и численный метод

2.1. Регуляризованные уравнения мелкой воды (РУМВ)

РУМВ в отсутствии внешних сил и условием плоского дна в векторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m &= 0 \\ \frac{\partial(h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} &= \nabla \Pi \end{aligned} \quad (1)$$

Где h - толщина слоя воды, $\mathbf{j}_m = h(\mathbf{u} - \mathbf{w})$ - вектор плотности потока массы, \mathbf{u} - вектор распределения горизонтальных скоростей, g - ускорение силы тяжести, $\Pi = \Pi_{NS} + \Pi_{QGD}$ -

тензор вязких напряжений, $\mathbf{\Pi}_{NS}$ – тензор вязких напряжений Навье-Стокса, КГД слагаемые: \mathbf{w} , $\mathbf{\Pi}_{QGD}$; \otimes – векторное произведение. Здесь оператор набла, действующий на скаляр, означает градиент, на вектор – дивергенцию, на тензор – ковариантную производную: $\nabla T \equiv \vec{y} | y_\beta = \nabla_\alpha T_{\alpha\beta}$.

Система РУМВ с учетом батиметрии дна, внешних сил и подвижности береговой линии приведена и использована в численном моделировании в работах [1; 6; 12; 15; 17; 18].

2.2. Дискретизация регуляризованных уравнений мелкой воды

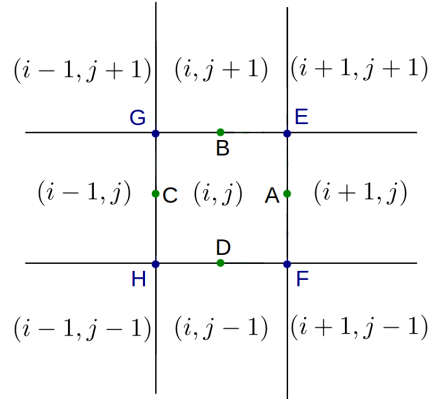


Рис. 1: Численный шаблон. Значения переменных h и \mathbf{u} отнесены к центрам ячеек с координатами (i, j) .

Дискретизация уравнения сохранения массы (здесь и далее нижний индекс x/y маркирует компоненту вектора):

$$\hat{h}_{i,j} = h_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2)$$

Дискретизация уравнений баланса импульсов:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{i,j}(\hat{u}_x)_{i,j} = & h_{i,j}(u_x)_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((u_x)_{i+\frac{1}{2},j}(j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (u_x)_{i-\frac{1}{2},j}(j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((u_x)_{i,j+\frac{1}{2}}(j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (u_x)_{i,j-\frac{1}{2}}(j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{i+\frac{1}{2},j}h_{i+\frac{1}{2},j} - h_{i-\frac{1}{2},j}h_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\Pi_{xx})_{i+\frac{1}{2},j} - (\Pi_{xx})_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((\Pi_{yx})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\Pi_{yx})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{i,j}(\hat{u}_y)_{i,j} = & h_{i,j}(u_y)_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((u_y)_{i,j+\frac{1}{2}}(j_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (u_y)_{i,j-\frac{1}{2}}(j_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((u_y)_{i+\frac{1}{2},j}(j_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (u_y)_{i-\frac{1}{2},j}(j_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right) - 0.5g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}}h_{i,j+\frac{1}{2}} - h_{i,j-\frac{1}{2}}h_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left((\Pi_{yy})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\Pi_{yy})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\Pi_{xy})_{i+\frac{1}{2},j} - (\Pi_{xy})_{i-\frac{1}{2},j} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Детали разностной аппроксимации РУМВ приведены в Приложении.

3. Реализация в AMReX

Численное решение уравнений мелкой воды реализовано на языке C++ с использованием открытого программного обеспечения AMReX. Данное ПО было взято за основу, поскольку позволяет использовать готовую логику дробления сеток по уровням, а также даёт возможность простого переноса (посредством макросов) вычислений на GPU ядра, что делает вычисления значительно менее затратными по времени.

На рисунке 2 представлена структура разработанного программного обеспечения.

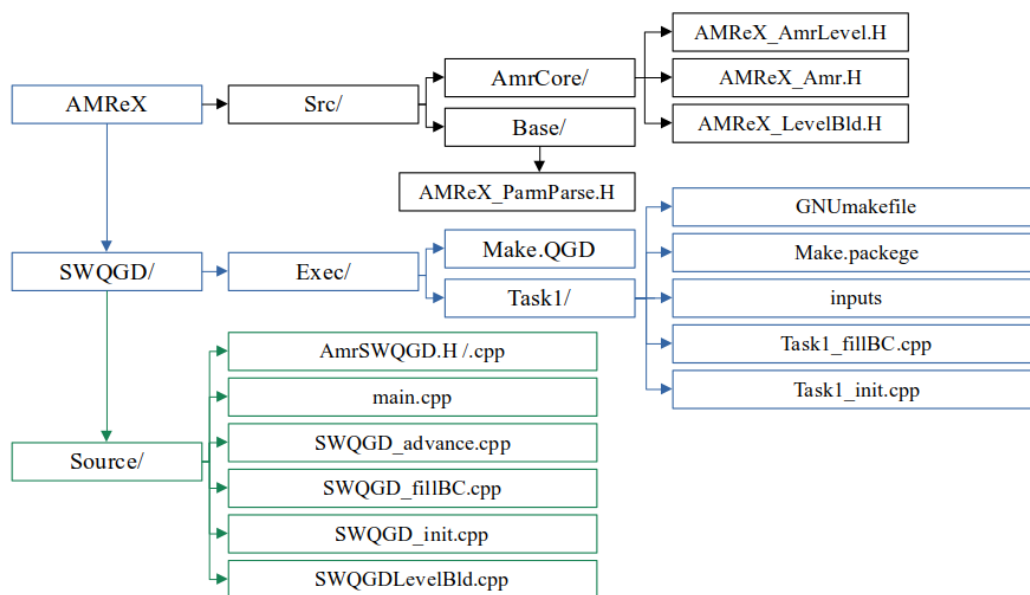


Рис. 2: Структура решателя

Основной класс-решатель – AmrSWQGD – объявлен в файле AmrSWQGD.H и реализован в файле AmrSWQGD.cpp. Он наследуется от класса AmrLevel, определенного в ядре AMReX. Наследование от этого класса позволяет простым способом измельчать сетку по уровням.

Логика итерации решателя определена в файле SWQGD_advance.cpp в методе advance. В нем при помощи цикла ParallelFor выполняется обновление полей h , u_x и u_y на каждой итерации. Здесь huOld - контейнер старых переменных, huNew - новых. Поскольку решение происходит на многоуровневой сетке (рис. 3), на каждом уровне которой своё разбиение (на уровне 0 самая грубая сетка, на уровнях выше точность увеличивается), то на каждом уровне вводится свой собственный шаг по времени. Например, если сетка имеет 2 уровня – 0 и 1, – и на уровне 1 сетка в 2 раза точнее по каждому направлению, чем на уровне 0, то одна итерация решения происходит следующим образом: происходит расчёт на уровне 0 с шагом по времени dt, происходят 2 итерации расчёта на уровне 1 с шагом по времени dt/2, а затем сетки синхронизируются (рис. 4). Такой алгоритм позволяет повысить точность вычислений.

Стоит отметить, что на каждом уровне необходимо уточнять не всю сетку, а только некоторые её части. Для этого класс-решатель определяет метод errorEst в файле AmrSWQGD.cpp. Данный метод принимает ссылку на экземпляр tags контейнера TagBoxArray. В цикле ParallelFor проходит каждая ячейка сетки, которая отмечается для разбиения, если подходит под некоторое условие (определяется в if() конструкции). Также для разбиения помечаются некоторые

окружающие её ячейки. Остальные ячейки, которые не подходят под условие, помечаются меткой `clearval` и не будут подвергаться измельчению.

Сами расчётные задачи находятся в папке `Exes`, в этой папке содержатся файлы `inputs`, файл с начальными и граничными условиями.

В файле `inputs` записываются настройки решения:

- `max_step` – максимальное количество итераций
- `stop_time` – расчётное время в секундах, на котором останавливается решение (по сути, расчёты идут до момента, пока количество итераций не превысит `max_step` или пока расчётное время не станет равным `stop_time`)
- `geometry.is_periodic` – массив из 3 булевых переменных (например 0 0 0 или 0 1 1 или 1 0 1), определяющий будут ли границы по определённому направлению периодичны (1) или нет (0)
- `geometry.coord_sys` – система координат, в которой происходит решение (рекомендуемое значение 0, что соответствует декартовой системе координат; гарантии того, что решатель будет корректно работать в других системах, не даются)
- `geometry.prob_lo` – хуз координаты левого нижнего угла физической прямоугольной области (например, 0.0 0.0 0.0)
- `geometry.prob_hi` – хуз координаты правого верхнего угла физической области (например, 10. 10. 1.)
- `amr.n_cell` – массив из трёх целых переменных, обозначающих разбиение сетки в каждом из направлений на 0 уровне (например, 512 512 1)
- `amr.max_level` – целое число, обозначающее максимальный допустимый уровень разбиения сетки
- `amr.ref_ratio` – коэффициент дробления сетки по уровням
- `amr.regrid_int` – целое число, обозначающее количество шагов, через которое следует пересоздать сетку
- `amr.max_grid_size` – решатель делит сетку на домены, размер каждого не превосходит `max_grid_size` по каждому из направлений
- `amr.plot_int` – решатель записывает в файлы каждые `plot_int` итераций.

Уравнения граничных условий описаны в структуре `SWQGDBCFill` в файле `Task1_fillBC.cpp` (`Task1` название задачи и может быть изменено на любое другое). Здесь `ilo` – левая граница расчётной области, `ihi` – правая граница, `jlo` – нижняя граница, `jhi` – верхняя граница. Уравнения решаются для переменных h , u_x и u_y , т.е. высоты столба воды, скорости по x-направлению и скорости по y-направлению. Переменная `dest` представляет собой многомерный массив, хранящий значения всех переменных во всей расчётной области. Обратиться к переменной h в ячейке (i, j, k) можно с помощью `dest(i, j, k, 0)`, к переменной u в той же ячейке – с помощью `dest(i, j, k, 1)`, а к переменной v , соответственно, как `dest(i, j, k, 2)`. Так как у нас 2D уравнения, то индекс k в данном случае полагается равным 1.

Начальные условия задаются в файле `Task1_init.cpp`. Здесь переменная `snew[bi]` выступает в роли контейнера, аналогичного контейнеру `dest` в структуре для граничных условий. Начальные условия рассчитываются в цикле `amrex::ParallelFor`. Данный цикл вместе с макросом-лямбда-функцией `AMREX_GPU_DEVICE` позволяет выполнить расчёт граничных условий во всей области параллельно на GPU ядрах.

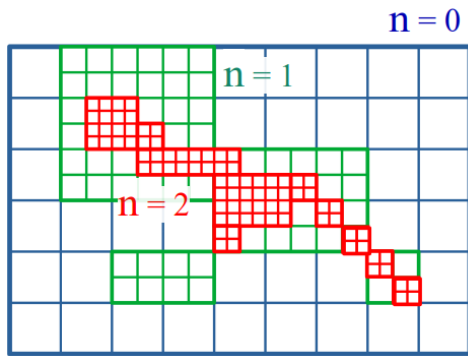


Рис. 3: Схема алгоритма адаптивного измельчения сетки

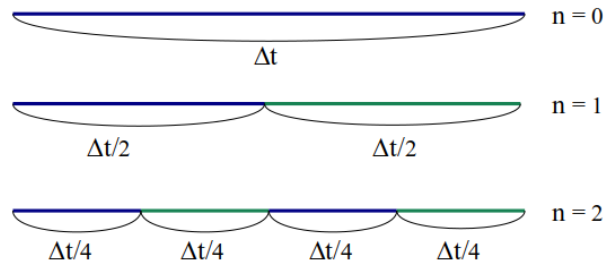


Рис. 4: Схема алгоритма дробления временного шага в подцикле

Для компиляции программы необходимо перейти в папку с задачей (`Task1`), затем в терминале запустить команду `make -jn`, где n – количество ядер для распараллеливания. Для запуска утилиты без распараллеливания достаточно запустить просто `make`. После завершения работы `make` в папке появится файл `main2d.gnu.MPI.ex` (название может немного отличаться). Далее для запуска необходимо в терминале прописать следующую команду:

$$mpirun -np n ./main2d.gnu.MPI.ex inputs$$

где n - количество ядер для распараллеливания, после чего запустится расчёт.

4. Результаты

Для валидации и верификации разработанного решателя используются две двумерных задачи: 1) задача о разрушении радиальной плотины, для неё хорошо известно аналитическое решение ; 2) задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости

4.0.1. Двумерная задача о разрушении радиальной плотины (Circular Dam-Break)

Задача о распаде столба жидкости или о прорыве круглой дамбы (Circular Dam-Break) является широко распространённой при валидации и верификации новых решателей [2; 3; 8; 13]. Рассматривается $2D$ плоскость размером 40×40 м, в центре которой находится столб жидкости высотой $h = 2.5$ и радиусом $R = 2.5$; высота жидкости в остальной области составляет $h_0 = 0.5$ (рис. 5). Расчётная область разбивается на 40000 однородных ячеек, то есть по 200 в каждом направлении. Шаг по времени выбирается равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, расчёт заканчивался в момент времени $t = 4.7$ с.

Визуализация на рис. 6 показывает распад столба жидкости. В начальный момент времени убирается стенка и наблюдается движение воды во всех направлениях. Затем, в то время

как, круговая ударная волна распространяется наружу, внутрь исходного цилиндра движется волна разряжения, до тех пор пока она полностью не сходится в центре расчётной области где она отражается, что вызывает градиент высоты, а как следствие и вторичную ударную волну. На рис. 7 приведены результаты численных экспериментов в сравнении с аналитическим решением из [8] в момент времени $t = 4.7$ с. Показана (рис. 7.a) зависимость решения от параметра настройки алгоритма α (см. Приложение, формула (7)). Оптимальным значением является $\alpha = 0.2$. Сходимость решения по сетке показана на рис. 7.b. Характерное число Куранта равно 0.2.

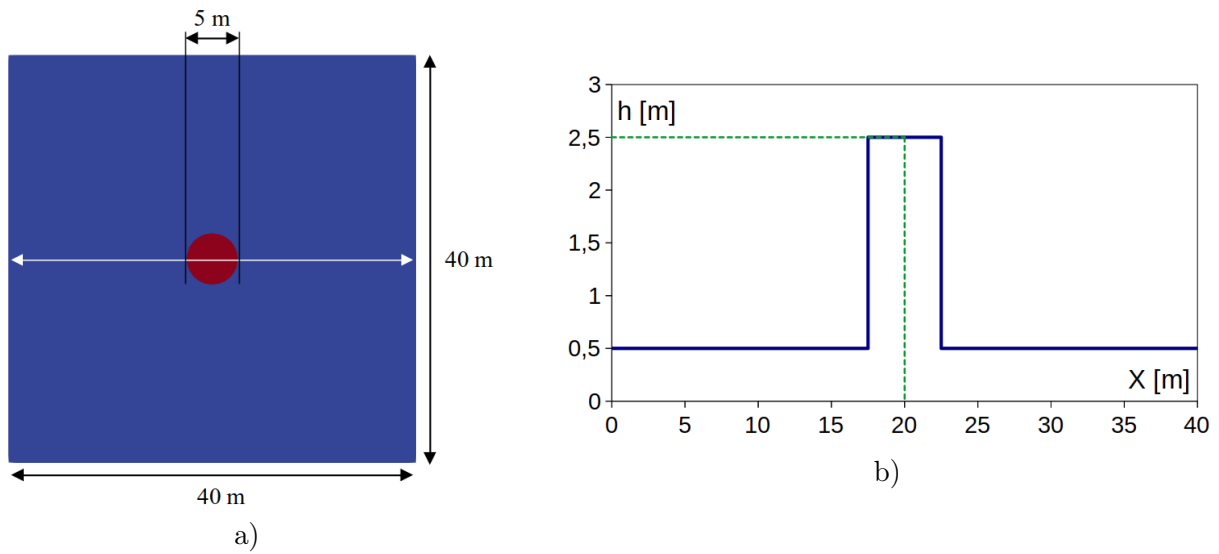


Рис. 5: Начальные условия задачи о разрушении радиальной плотины. а) геометрия расчётной области и начальное распределение; б) высота столба жидкости вдоль белой линии.

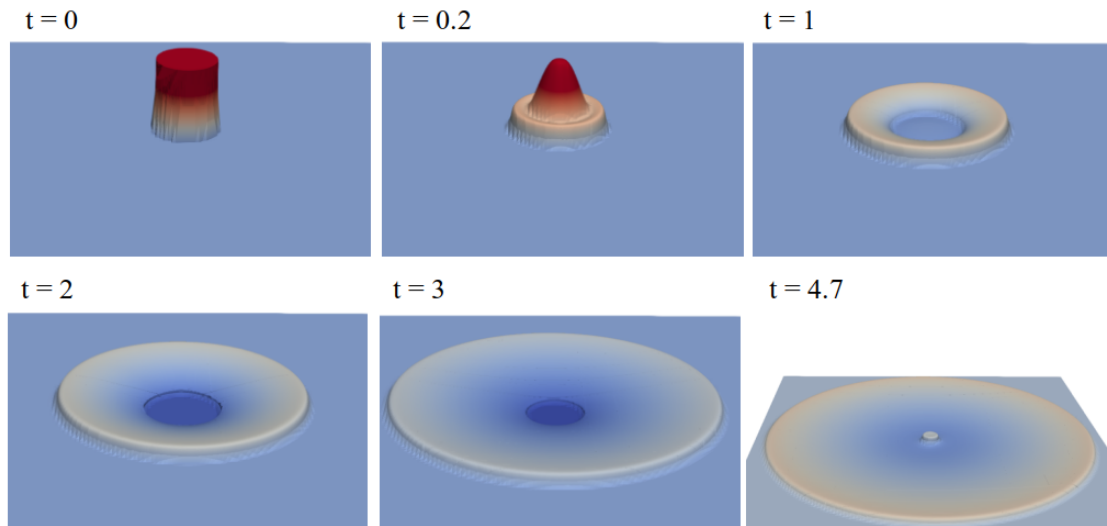


Рис. 6: Визуализация распада столба жидкости со временем $\alpha = 0.2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с. Время на рисунке в секундах.

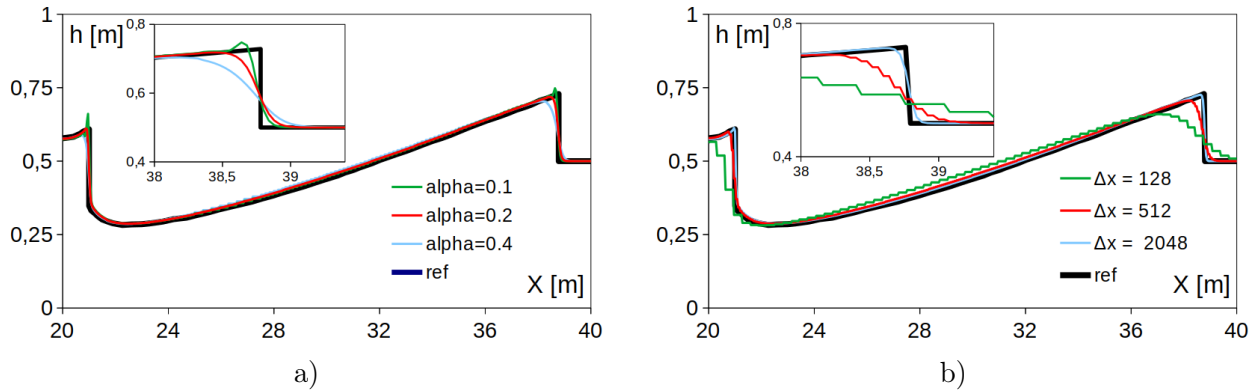


Рис. 7: Распределение высоты столба жидкости с шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$ с, в момент времени $t = 4.7$ с. а) Зависимость от параметра α на постоянной сетке $\Delta x = 1024$; б) Сходимость по сетке при постоянном $\alpha = 0.2$

Пример работы алгоритма адаптивного измельчения сетки можно видеть на рис. 8. Здесь в зависимости от выбранного критерия адаптации (в нашем случае это градиент высоты столба жидкости) выполняется дробление сетки по уровням (в нашем случае $n_{amr} = 4$), что значительно ускоряет расчёт, детальное исследование приведено в разделе об исследовании производительности решателя SWqgdAMR.

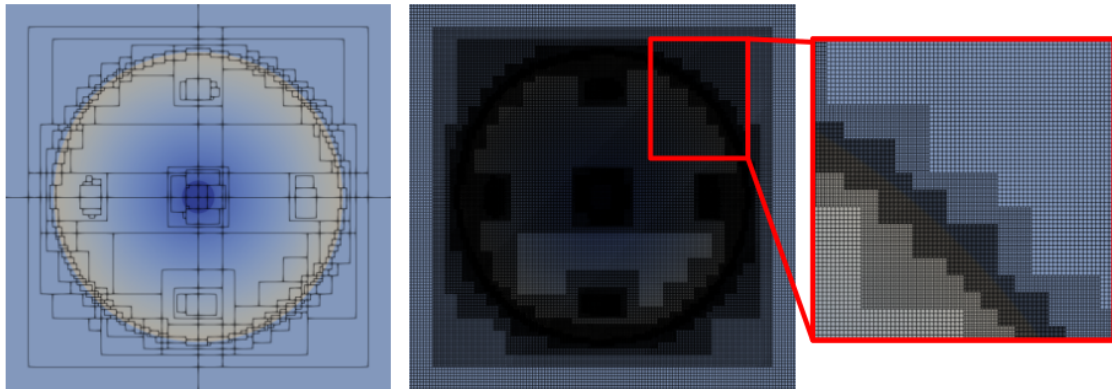


Рис. 8: Визуализация работы алгоритма адаптивного измельчения сетки при $\alpha = 0.2$ в момент времени $t = 3$ с. На первом рисунке изображено разбиение на блоки, на втором адаптивная сетка.

4.0.2. Распад двух разных по высоте столбов жидкости

Как и предыдущий тест, задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости позволяет проверить возможность решателя воспроизводить сложные структуры течения. Рассматривается $2D$ плоскость размером 2000×2000 м, в точке $(875, 0)$ располагается первый столб воды радиуса $R_1 = 125$ м и высотой $h_1 = 15$ м, в точке с координатами $(1375, 0)$ располагается второй столб воды $R_2 = 125$ м $h_2 = 20$ м, уровень воды в остальной области равен $h_1 = 10$ м (рис. 9). Расчётная область разбивается на 160000 однородных ячеек, то есть по 400 в каждом направлении. Шаг по времени выбирается равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, расчёт заканчивался в момент времени $t = 30$ с.

Визуализация на рисунке (рис. 10- 11) показывает распад и дальнейшее взаимодействие двух столбов жидкости. В начальный момент времени убираются стенки и наблюдается дви-

жение воды от каждого столба во всех направлениях. Затем две ударные волны сталкиваются друг с другом, и происходит сильная деформация фронта двух волн.

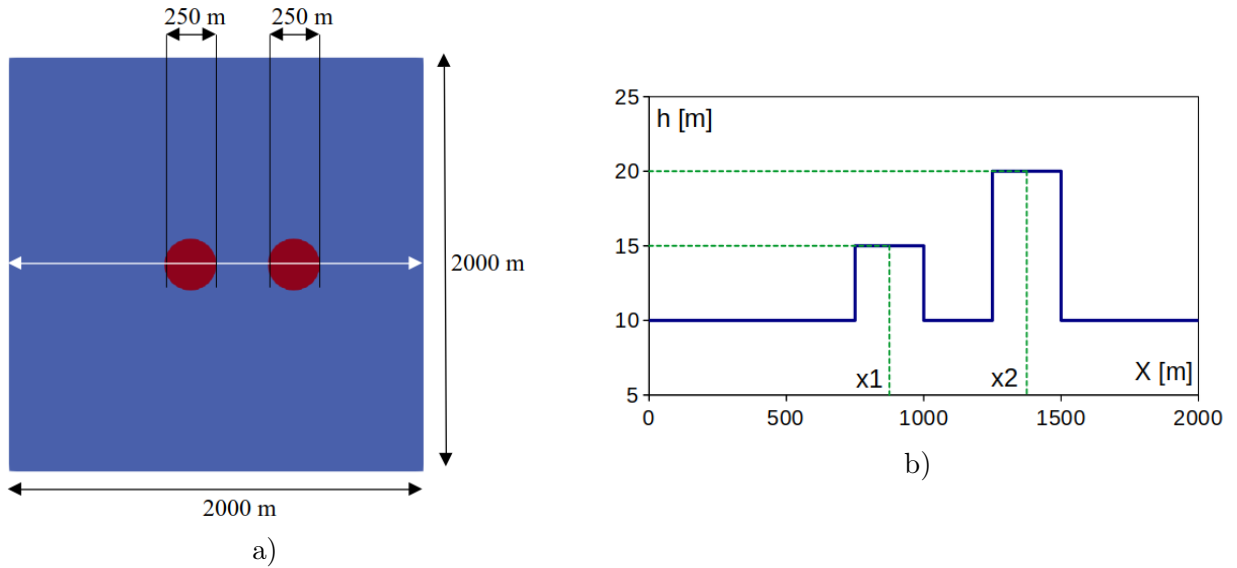


Рис. 9: Начальные условия задачи о распаде двух разных по высоте столбов жидкости. а) геометрия расчётной области; б) высота столба жидкости вдоль белой линии, $x_1 = 875$ м, $x_2 = 1375$ м

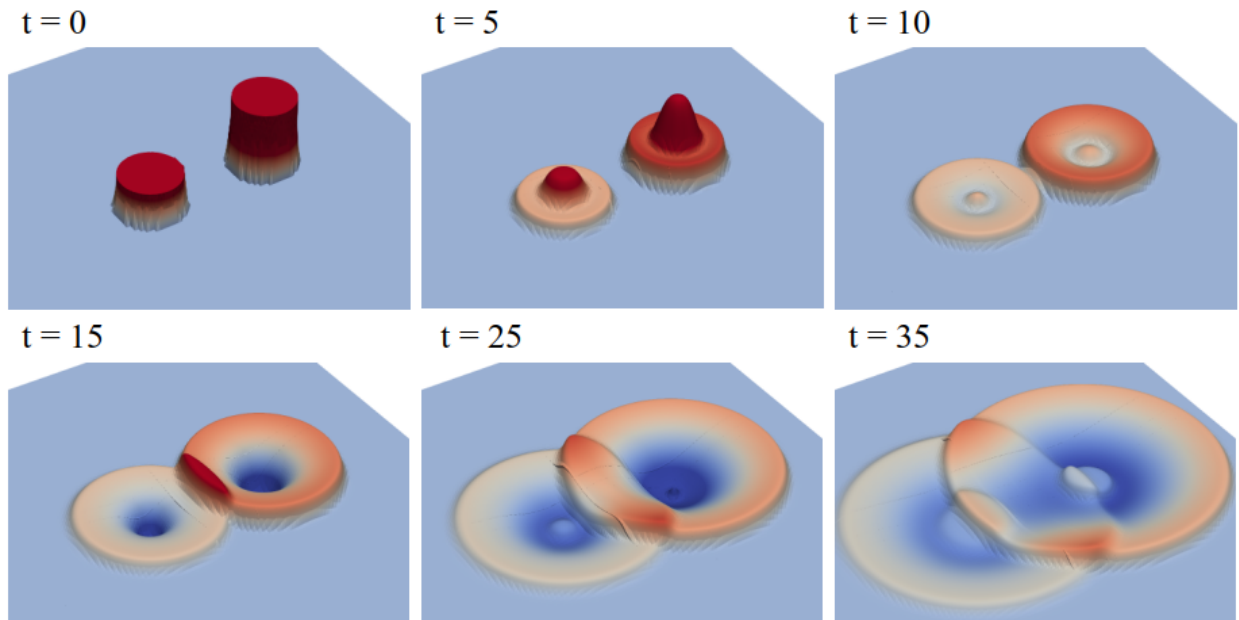


Рис. 10: Визуализация распада двух столбов жидкости со временем $\alpha = 0.2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с. Время на рисунке в секундах.

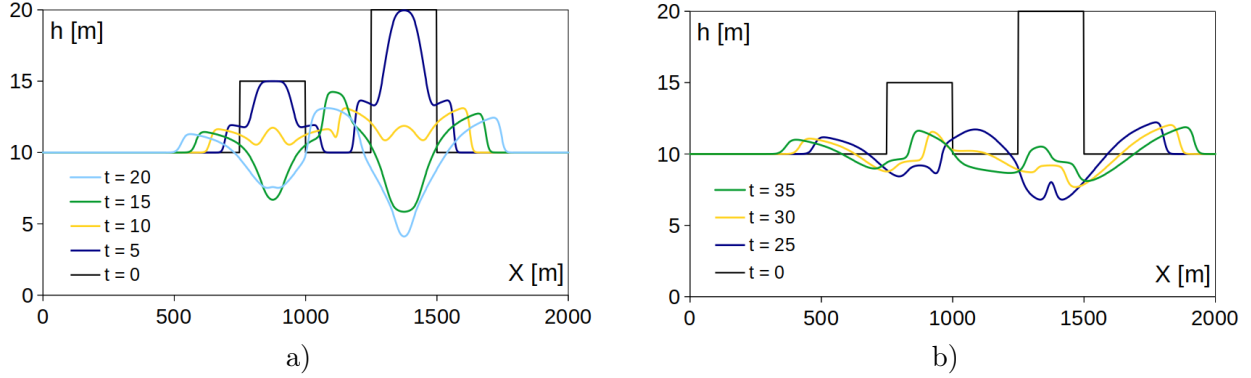


Рис. 11: График распада двух столбов жидкости со временем в центральном сечении. Время на рисунке в секундах, $\Delta x = 1024$, $\alpha = 0.2$, $\Delta t = 10^{-4}$ с.

4.1. Производительность решателя SWqgdAMR

Одним из важных критериев при разработке нового решателя является оценка его производительности и эффективности распараллеливания. Для это была использована задача о распаде двух разных по высоте столбов жидкости. Было взято 1048576 ячеек расчётных сеток, шаг по времени $\Delta t = 10^{-4}$ с; расчёт завершался при $t = 0.1$ с. Для оценки производительности решателя использовался 1 физический процессор Intel(R) Core(TM) i7-9700 CPU @ 3.00GHz с 8 ядрами, результаты представлены в таблице 1.

Кол-во ядер	Кол-во ячеек	Время расчёта, t с	Эффективность, %
1	1 048 576	71	-
2	524 288	40	89
4	262 144	27	66

Таблица 1: Оценка производительности решателя SWqgdAMR

На том же процессоре с использованием 2 ядер было исследовано ускорение вычислений за счёт использования технологии адаптивного измельчения сетки. Данные представлены в таблице 2. Количество расчётных ячеек при $n_{amr} = 0$ равно 4 194 304, базовая сетка при $n_{amr} = 1$ равна 1 048 576, при $n_{amr} = 2$ 262 144, при $n_{amr} = 4$ базовая расчётная сетка 65 536, при этом во всех случаях разрешение течения остаётся постоянным, качество может отличаться в зависимости от критерия адаптации (пример работы алгоритма измельчения демонстрирует рис. 8). В наших расчётах в качестве критерия адаптации сетки был выбран градиент высоты столба жидкости.

Кол-во ядер	Кол-во ячеек	$n_{amr} = 0$	$n_{amr} = 1$	$n_{amr} = 2$	$n_{amr} = 4$
2	4 194 304	2288	359	132	41

Таблица 2: Время вычисления в секундах в зависимости от уровней адаптации сетки.

Таким образом использование технологии адаптивного измельчения сетки позволяет значительно ускорять вычисления. В нашем случае достигается ускорение до 56 раз. В работе [10] показано, что на одинаковых стационарных сетках AMReX быстрее OpenFOAM в 4 раза, таким образом с использованием измельчения сетки можно добиться выигрыша в скорости до 232 раз.

5. Заключение

В работе детально описан и протестирован решатель уравнений мелкой воды SWqgdAMR с адаптивным измельчением сеток. Для валидации SWqgdAMR использовались две двумерные задачи: о прорыве цилиндрической плотины и о прорыве двух цилиндрических плотин разной высоты. Представленный решатель показал высокую эффективность, а использование технологии адаптивного измельчения сетки позволило ускорить расчёт до 56 раз по сравнению с расчётом на стационарной сетке.

Решатель SWqgdAMR написан в рамках работы по расширению применимости регуляризованных уравнений в задачах, требующих больших вычислительных мощностей и адаптивных сеток. SWqgdAMR является первым решателем на базе КГД алгоритма в программном комплексе AMReX. Реализация и валидация SWqgdAMR является основным шагом на пути дальнейшего расширения комплекса КГД программ. Следующий этап работ включает в себя добавление в AMReX квазигазодинамических уравнений для расчёта задач газодинамики.

В данной реализации КГД алгоритма не тестировались перспективные возможности применения распараллеливания вычислений на графические ядра. Так же стоит отметить, что алгоритм могут быть включена батиметрия дна, внешние силы такие, как сила ветра, трение о дно, силы Кориолиса, а также учет подвижности береговой линии при осушке-наводнении, как это уже было сделано в рамках исследовательских кодов для РУМВ.

6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ No. 075 – 15 – 2022 – 283

7. Приложение

КГД уравнения мелкой воды в покомпонентной форме:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{my}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h u_x}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_x}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h u_y}{\partial t} + \frac{\partial j_{mx} u_y}{\partial x} + \frac{\partial j_{my} u_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y}. \quad (7)$$

$$j_{mx} = h(u_x - w_x), \quad w_x = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (h u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h u_x u_y)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$j_{my} = h(u_y - w_y), \quad w_y = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial (h u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (h u_x u_y)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{xx} &= u_x \hat{w}_x + R + \Pi_{xx}^{NS}, \quad \Pi_{xy} = u_x \hat{w}_y + \Pi_{xy}^{NS}, \\ \Pi_{yx} &= u_y \hat{w}_x + \Pi_{yx}^{NS}, \quad \Pi_{yy} = u_y \hat{w}_y + R + \Pi_{yy}^{NS},\end{aligned}\tag{10}$$

$$\Pi_{xx}^{NS} = h\nu \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right), \quad \Pi_{yy}^{NS} = h\nu \left(2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right),$$

$$\Pi_{xy}^{NS} = \Pi_{yx}^{NS} = h\nu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right),\tag{11}$$

$$\nu = \tau \frac{gh^2}{2}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\hat{w}_x = \tau \left(hu_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + hu_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right),\tag{12}$$

$$\hat{w}_y = \tau \left(hu_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + hu_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gh^2}{2} \right) \right)$$

$$R = g\tau \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^2}{2} \right) + h^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right)\tag{13}$$

Запишем пространственную дискретизацию уравнений (5-7) с учетом значений величин в полуцелых точках сетки, см. рис. 1.

$$\begin{aligned}h_A &= h_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5(h_{i,j} + h_{i+1,j}), \quad h_B = h_{i,j+\frac{1}{2}} = 0.5(h_{i,j} + h_{i,j+1}), \\ h_C &= h_{i-\frac{1}{2},j} = 0.5(h_{i,j} + h_{i-1,j}), \quad h_D = h_{i,j-\frac{1}{2}} = 0.5(h_{i,j} + h_{i,j-1}), \\ h_E &= h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25(h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j+1}), \\ h_F &= h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.25(h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i+1,j-1}), \\ h_G &= h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25(h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i-1,j+1}), \\ h_H &= h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.25(h_{i,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j-1} + h_{i-1,j-1})\end{aligned}\tag{14}$$

Аналогично записывается дискретизация компонент скорости в полуцелых точках.

Дискретизация потока массы:

$$\begin{aligned}j_{xA} &= j_{xi+\frac{1}{2},j} = h_{i+\frac{1}{2},j} \left(u_{xi+\frac{1}{2},j} - w_{xi+\frac{1}{2},j} \right), \\ j_{yB} &= j_{yi,j+\frac{1}{2}} = h_{i,j+\frac{1}{2}} \left(u_{yi,j+\frac{1}{2}} - w_{yi,j+\frac{1}{2}} \right), \\ j_{xC} &= j_{xi-\frac{1}{2},j} = h_{i-\frac{1}{2},j} \left(u_{xi-\frac{1}{2},j} - w_{xi-\frac{1}{2},j} \right), \\ j_{yD} &= j_{yi,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j-\frac{1}{2}} \left(u_{yi,j-\frac{1}{2}} - w_{yi,j-\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\tag{15}$$

Дискретизация КГД слагаемых:

$$\begin{aligned}
w_{xA} = w_{xi+\frac{1}{2},j} &= \frac{\tau_{i+\frac{1}{2},j}}{h_{i+\frac{1}{2},j}} \left(\frac{h_{i+1,j}u_{xi+1,j}u_{xi+1,j} - h_{i,j}u_{xi,j}u_{xi,j}}{\Delta x} + \right. \\
&+ \left. \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 0.5g \frac{h_{i+1,j}h_{i+1,j} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta x} \right), \\
w_{yB} = w_{yi,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\tau_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_{i,j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{i,j+1}u_{yi,j+1}u_{yi,j+1} - h_{i,j}u_{yi,j}u_{yi,j}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 0.5g \frac{h_{i,j+1}h_{i,j+1} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta y} \right), \\
w_{xC} = w_{xi-\frac{1}{2},j} &= \frac{\tau_{i-\frac{1}{2},j}}{h_{i-\frac{1}{2},j}} \left(\frac{h_{i,j}u_{xi,j}u_{xi,j} - h_{i-1,j}u_{xi-1,j}u_{xi-1,j}}{\Delta x} + \right. \\
&+ \left. \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 0.5g \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i-1,j}h_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \\
w_{yD} = w_{yi,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\tau_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{i,j}u_{yi,j}u_{yi,j} - h_{i,j-1}u_{yi,j-1}u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 0.5g \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i,j-1}h_{i,j-1}}{\Delta y} \right)
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
w_{xA}^* = w_{xi+\frac{1}{2},j}^* &= \tau_{i+\frac{1}{2},j} \left(h_{i+\frac{1}{2},j}u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi+1,j} - u_{xi,j}}{\Delta x} + h_{i+\frac{1}{2},j}u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. 0.5g \frac{h_{i+1,j}h_{i+1,j} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta x} \right), \\
w_{xB}^* = w_{xi,j+\frac{1}{2}}^* &= \tau_{i,j+\frac{1}{2}} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}}u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j+\frac{1}{2}}u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{xi,j+1} - u_{xi,j}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. 0.5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right), \\
w_{xC}^* = w_{xi-\frac{1}{2},j}^* &= \tau_{i-\frac{1}{2},j} \left(h_{i-\frac{1}{2},j}u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi,j} - u_{xi-1,j}}{\Delta x} + h_{i-\frac{1}{2},j}u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. 0.5g \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i-1,j}h_{i-1,j}}{\Delta x} \right), \\
w_{xD}^* = w_{xi,j-\frac{1}{2}}^* &= \tau_{i,j-\frac{1}{2}} \left(h_{i,j-\frac{1}{2}}u_{xi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j-\frac{1}{2}}u_{yi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{xi,j} - u_{xi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
&+ \left. 0.5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
w_{yA}^* &= w_{yi+\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i+\frac{1}{2},j} \left(h_{i+\frac{1}{2},j} u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi+1,j} - u_{yi,j}}{\Delta x} + h_{i+\frac{1}{2},j} u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. + 0.5g \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right), \\
w_{yB}^* &= w_{yi,j+\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j+\frac{1}{2}} \left(h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j+\frac{1}{2}} u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{u_{yi,j+1} - u_{yi,j}}{\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. + 0.5g \frac{h_{i,j+1} h_{i,j+1} - h_{i,j} h_{i,j}}{\Delta y} \right), \\
w_{yC}^* &= w_{yi-\frac{1}{2},j}^* = \tau_{i-\frac{1}{2},j} \left(h_{i-\frac{1}{2},j} u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi,j} - u_{yi-1,j}}{\Delta x} + h_{i-\frac{1}{2},j} u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. + 0.5g \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right), \\
w_{yD}^* &= w_{yi,j-\frac{1}{2}}^* = \tau_{i,j-\frac{1}{2}} \left(h_{i,j-\frac{1}{2}} u_{xi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + h_{i,j-\frac{1}{2}} u_{yi,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{yi,j} - u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
&\quad \left. + 0.5g \frac{h_{i,j} h_{i,j} - h_{i,j-1} h_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{div}(u)_A &= \frac{u_{xi+1,j} - u_{xi,j}}{\Delta x} + \frac{u_{yi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \quad \text{div}(u)_B = \frac{u_{yi,j+1} - u_{yi,j}}{\Delta y} + \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\
\text{div}(u)_C &= \frac{u_{xi,j} - u_{xi-1,j}}{\Delta x} + \frac{u_{yi-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{yi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \quad \text{div}(u)_D = \frac{u_{yi,j} - u_{yi,j-1}}{\Delta y} + \frac{u_{xi+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{xi-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{19}
\end{aligned}$$

Параметр регуляризации алгоритма $\tau = \frac{\alpha \Delta h}{\sqrt{gh}}$ вычисляется как:

$$\tau_A = \tau_{i+\frac{1}{2},j} = \alpha \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{gh_{i+\frac{1}{2},j}}}; \quad \tau_B = \tau_{i,j+\frac{1}{2}} = \alpha \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{gh_{i,j+\frac{1}{2}}}}; \tag{20}$$

где α - настроечное число в пределах обычно больше 0 и меньше 1, g - ускорение свободного падения. Аналогично, записывается и дискретизация для τ_C, τ_D . Шаг по времени на базовой расчётной сетки выбирается так, чтобы удовлетворить условию устойчивости для явной схемы и имеет вид условия Куранта, подробнее см. в [20] (число Куранта $0 < \beta < 1$):

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}} \right)_{\min} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
R_A &= R_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{g\tau_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \left(u_{xi+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j}h_{i+1,j} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta x} + \right. \\
&+ u_{yi+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 2h_{i+\frac{1}{2},j}h_{i+\frac{1}{2},j} \operatorname{div}(u)_A \left. \right), \\
R_B &= R_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{g\tau_{i,j+\frac{1}{2}}}{2} \left(u_{yi,j+\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j+1}h_{i,j+1} - h_{i,j}h_{i,j}}{\Delta y} + \right. \\
&+ u_{xi,j+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 2h_{i,j+\frac{1}{2}}h_{i,j+\frac{1}{2}} \operatorname{div}(u)_B \left. \right), \\
R_C &= R_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{g\tau_{i-\frac{1}{2},j}}{2} \left(u_{xi-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i-1,j}h_{i-1,j}}{\Delta x} + \right. \\
&+ u_{yi-\frac{1}{2},j} \frac{h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} + 2h_{i-\frac{1}{2},j}h_{i-\frac{1}{2},j} \operatorname{div}(u)_C \left. \right), \\
R_D &= R_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{g\tau_{i,j-\frac{1}{2}}}{2} \left(u_{yi,j-\frac{1}{2}} \frac{h_{i,j}h_{i,j} - h_{i,j-1}h_{i,j-1}}{\Delta y} + \right. \\
&+ u_{xi,j-\frac{1}{2}} \frac{h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}h_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + 2h_{i,j-\frac{1}{2}}h_{i,j-\frac{1}{2}} \operatorname{div}(u)_D \left. \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

Дискретизация тензора вязких напряжений:

$$\begin{aligned}
\Pi_{xxA} &= \Pi_{xx\ i+\frac{1}{2},j} = u_{x\ i+\frac{1}{2},j} w_{x\ i+\frac{1}{2},j}^* + R_{x\ i+\frac{1}{2},j}, \quad \Pi_{xxB} = \Pi_{xx\ i-\frac{1}{2},j} = u_{x\ i-\frac{1}{2},j} w_{x\ i-\frac{1}{2},j}^* + R_{x\ i-\frac{1}{2},j}, \\
\Pi_{xyA} &= \Pi_{xy\ i+\frac{1}{2},j} = u_{x\ i+\frac{1}{2},j} w_{y\ i+\frac{1}{2},j}^*, \quad \Pi_{xyB} = \Pi_{xy\ i-\frac{1}{2},j} = u_{x\ i-\frac{1}{2},j} w_{y\ i-\frac{1}{2},j}^*, \\
\Pi_{yxC} &= \Pi_{yx\ i,j+\frac{1}{2}} = u_{y\ i,j+\frac{1}{2}} w_{x\ i,j+\frac{1}{2}}^*, \quad \Pi_{yxD} = \Pi_{yx\ i,j-\frac{1}{2}} = u_{y\ i,j-\frac{1}{2}} w_{x\ i,j-\frac{1}{2}}^*, \\
\Pi_{yyC} &= \Pi_{yy\ i,j+\frac{1}{2}} = u_{x\ i,j+\frac{1}{2}} w_{x\ i,j+\frac{1}{2}}^* + R_{x\ i,j+\frac{1}{2}}, \quad \Pi_{yyD} = \Pi_{yy\ i,j-\frac{1}{2}} = u_{x\ i,j-\frac{1}{2}} w_{x\ i,j-\frac{1}{2}}^* + R_{x\ i,j-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{23}$$

Список литературы

1. Bulatov O., Elizarova T. G. Regularized shallow water equations and an efficient method for numerical simulation of shallow water flows // Computational mathematics and mathematical physics. — 2011. — Т. 51. — С. 160–173.
2. Delis A., Nikolos I. A novel multidimensional solution reconstruction and edge-based limiting procedure for unstructured cell-centered finite volumes with application to shallow water dynamics // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2013. — Т. 71, № 5. — С. 584–633.
3. Delis A. I., Katsaounis T. Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods // Applied Mathematical Modelling. — 2005. — Т. 29, № 8. — С. 754–783.
4. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations / M. V. Kraposhin [и др.] // Computers & Fluids. — 2018. — Т. 166. — С. 163–175.
5. Elizarova T. Quasi-gas-dynamic Equations. — Springer, 2009.

6. Elizarova T. G., Ivanov A. V. Regularized equations for numerical simulation of flows in the two-layer shallow water approximation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2018. — Т. 58. — С. 714–734.
7. Epikhin A., But I. Numerical Simulation of Supersonic Jet Noise Using Open Source Software // *International Conference on Computational Science*. — Springer. 2023. — С. 292–302.
8. Ginting B. M., Mundani R.-P. Comparison of shallow water solvers: Applications for dam-break and tsunami cases with reordering strategy for efficient vectorization on modern hardware // *Water*. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 639.
9. Kraposhin M. V., Ryazanov D. A., Elizarova T. G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // *Computer Physics Communications*. — 2022. — Т. 271. — С. 108216.
10. Numerical Simulation of Propeller Hydrodynamics Using the Open Source Software / A. Britov [и др.] // *International Conference on Computational Science*. — Springer. 2023. — С. 279–291.
11. QGDsolver. — дата обр. 16.04.2024. — URL: <https://github.com/unicfdlab/QGDsolver>.
12. Saburin D. S., Elizarova T. G. Modelling the Azov Sea circulation and extreme surges in 2013-2014 using the regularized shallow water equations // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2018. — Т. 33, № 3. — С. 173–185.
13. Soares-Frazão S., Zech Y. Experimental study of dam-break flow against an isolated obstacle // *Journal of Hydraulic Research*. — 2007. — Т. 45, sup1. — С. 27–36.
14. TheLinuxFoundation. Linux Foundation Announces Intent to Form the High Performance Software Foundation. — дата обр. 16.04.2024. — URL: <https://www.linuxfoundation.org/press/linux-foundation-announces-intent-to-form-high-performance-software-foundation-hpsf>.
15. Булатов О. В., Елизарова Т. Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2011. — Т. 51, № 1. — С. 170–184.
16. Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. — 2007.
17. Елизарова Т. Г., Иванов А. В. Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений в приближении двухслойной мелкой воды // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2018. — Т. 58, № 5. — С. 741–761.
18. Иванов А. В. О реализации модели мелкой воды на базе квазигазодинамического подхода в открытом программном комплексе OpenFOAM // *Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН*. — 2023. — № 0. — С. 28–27.
19. Четверушкин Б. Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — МАКС Пресс, 2004.
20. Шеретов Ю. Регуляризованные уравнения гидродинамики // *Тверь: Тверской государственный университет*. — 2016. — С. 222.
21. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. — 2009.